MA1 – přednáška 16.11.2020 – 2. část

1. Vyšetření globálních extrémů funkce (úloha užitečná v aplikacích)

Připomeňme si definici globálního extrému funkce:

Definice: Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in Df$ globálního maxima (resp. globálního minima), když pro všechny body $x \in Df$ platí
$$f(x) \leqq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqq f(x_0))$$

Jediné, co matematika „ví“:

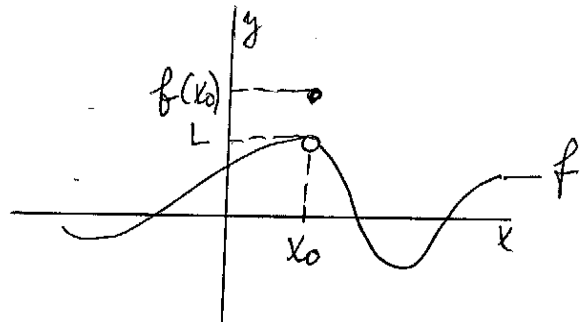
Věta: Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, pak na $\langle a,b\rangle$ f nabývá svých globálních extrémů (tj. nabývá v $\langle a,b\rangle$ svého globálního maxima i globálního minima)

A jak hledat a najít globální extrémy funkce (pokud existují) nebo jak ukázat, že funkce globální maximum nebo globální minimum nemá?

„Návod“:

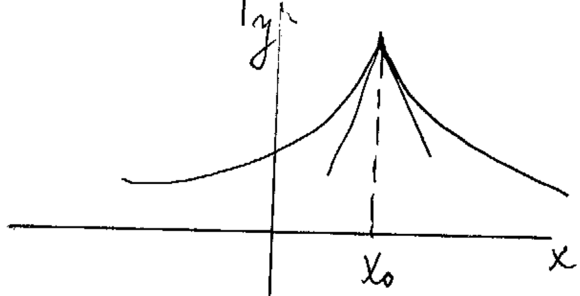
(1) najdeme hodnoty funkce v bodech kritických pro lokální extrém funkce (neboť je zřejmé, je-li v bodě $x_0 \in Df$ globální extrém funkce a f je definována v nějakém okolí $U(x_0) \subset Df$ (pak říkáme, že x_0 je vnitřní bod Df), pak v bodě x_0 má f i extrém lokální (viz definice); a které body jsou kritické pro lokální extrém („lidově“ – které body jsou „podezřelé“ z toho, že v nich může mít f lokální extrém)?

(i) body nespojitosti funkce f :



(ii) body, kde funkce f nemá derivaci (oboustrannou)

(na grafu je „špička")



(iii) na „víme" – jsou to body, kde $f'(x_0)=0$

(2) pokud jsou v D_f i krajní body intervalů z D_f, pak určíme hodnoty funkce f v těchto „krajních" bodech;

(3) pokud „krajní" body intervalů z D_f nepatří do D_f, určíme zde limity (jednostranné) (lépe – vyšetříme i existenci limity zde)

Pak: Je-li největší z hodnot f nabývána v bodech z (1) nebo (2), je to globální maximum funkce f; je-li ale největší z hodnot limita (tj. v (3)) (i $\pm\infty$), pak funkce globální maximum nemá.

Analogicky pro globální minimum.

(Zde pro jednoduchost předpokládáme, že bodů, kde máme srovnávat hodnoty f, je (v (1),(2),(3)) konečně mnoho.
Poznámka: je-li f konstantní v (a,b), pak $f'(x)=0$ všude, ale zase je „jasné", jak je to s extrémy.)

Příklad 1. (z geometrie)

Najděte na parabole o rovnici $y=x^2$ bod nejbližší bodu $A[6,3]$.

Lze řešit i pomocí analytické geometrie, my zkusíme užít „extrémy" funkce.

$A[6,3]$ není bodem paraboly;
budeme hledat minimum vzdálenosti bodu $A[6,3]$ od bodů paraboly $X[x,x^2]$ pro $x\in R$:

$$d(A,X) = \sqrt{(x-6)^2+(x^2-3)^2} \quad (= f(x)), \quad x\in R$$

a hledáme minimum – z „údolí": (stačí minimum fce $f^2(x)$)

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^2(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left((x-6)^2+(x^2-3)^2\right) = +\infty$

2) funkce je spojitá, ex. $f'(x)$ v R, tedy hledáme stacionární body $f^2(x)$ a hodnoty v nich:

$$(f^2(x))' = 2(x-6) + 2(x^2-3).2x = 2(2x^3-5x-6)$$

$(f^2(x))'=0$ pro $x=2$ („pokusem"), pak

$f^2(x)' = 2(x-2)(2x^2+4x+3)$, tj. $f^2(x)'=0 \iff x=2$
(jediný stac. bod – zde je asi „minimum")

		2	
$(f^2)'$	$-$		$+$
f^2	$\searrow$	2	$\nearrow$

tj. v bodě $x=2$ je ostré lok. minimum, tedy i globální

tj. nejbližší bod na parabole k bodu $A[6,3]$ je bod $\underline{B[2,4]}$, a $\underline{d(A,B)} = \sqrt{(2-6)^2+(3-4)^2} = \underline{\sqrt{17}}$

Příklad 2. (ze „života")

Máme udělat (třeba pro zahradu) sud – válec – daného objemu V s nejmenším povrchem (bez víka)

Rozměry válce: r – poloměr, v – výška

1) r, v nejsou nezávislé veličiny, neboť je dán objem $V = \pi r^2 \cdot v \Rightarrow v = \dfrac{V}{\pi r^2}$, pokud je dáno r

2) pak povrch (bez víka) $P(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$,

$r \in (0, +\infty)$

Hledáme minimum funkce $P(r)$ na intervalu $(0, +\infty)$:

(nevíme, zda existuje), ale +

$$\lim_{r \to 0+} P(r) = \lim_{r\to 0+} \Big(\underbrace{\pi r^2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2V}{r}}_{\to \infty}\Big) = +\infty, \text{ stejně}$$

$$\lim_{r \to +\infty} P(r) = \lim \Big(\underbrace{\pi r^2}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{2V}{r}}_{\to 0}\Big) = +\infty,$$

+ je spojitá a $P(r) > 0$ v $(0, +\infty)$, tedy bude minimum existovat; –

hledáme stacionární body:

$$P'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}, \quad P'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{\pi},$$

tj. $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$

pro $r^3 > \frac{V}{\pi}$ je $P'(r) > 0$, tj. P roste v $P_+(r_0)$

pro $r^3 < \frac{V}{\pi}$ je $P'(r) < 0$, tj. P klesá v $P_-(r_0)$

tj. v bodě $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ je ostré lokální i globální minimum

(tj. $P_{min} = P(r_0) = 3 \cdot \sqrt[3]{\pi V^2}$, $v_{min} = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$)

Příklad 3 (z fyziky a VŠCHT)

Kapka vody padá volným pádem (bez odporu vzduchu) a vypařuje se konstantní rychlostí (padá z dostatečné výšky) – kdy bude maximální její kinetická energie?

$m(t) = m_0 - kt$, m_0 – počáteční hmotnost, $k > 0$

$m(t) \geq 0$, tj. $t \in \langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$

$v(t) = g \cdot t$

$E(t) = \frac{1}{2} m v^2$, tj. zde

$E(t) = \frac{1}{2}(m_0 - kt) \cdot g^2 t^2$, a hledáme maximum na intervalu $\langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$ – z „teorie" plyne, že funkce $E(t)$ zde globální maximum nabývá. ($E(t)$ je spojitá v $\langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$)

1) $E(0) = E\left(\frac{m_0}{k}\right) = 0$ – zde „není" glob. max ($E(t) > 0$ v $(0, \frac{m_0}{k})$)

2) vyšetříme stacionární body v $(0, \frac{m_0}{k})$

$$E'(t) = \frac{1}{2} g^2 (m_0 t^2 - kt^3)' = \frac{1}{2}(2m_0 t - 3kt^2) = 0$$

$\iff t = 0$ („nehodí" se) $\vee$ $t = \frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$ $\left(\in (0, \frac{m_0}{k})\right)$

a tento bod „musí" být t_{max} (tj. bod, kde $E(t)$ nabývá glob. maxima.

Pak:
$$E_{max} = \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{2}{3}m_0\right) \cdot g^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{m_0^2}{k^2} = \frac{2}{27}\frac{m_0^3}{k^2}$$

a $m(t_{max}) = m_0 - k \cdot \frac{2}{3}\frac{m_0}{k} = \frac{1}{3} m_0$

(„max $E(t)$ je při $1/3$ hmotnosti a $2/3$ času")

Příklad 4 (z chemie)

Četnost molekul hmotnosti $\underline{m}$ o rychlosti $\underline{v}$ je dána

$$\underline{f(v) = K v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}} \qquad (K; k > 0 \text{ konstanty}, \ T - \text{abs. teplota})$$

$$\underline{v \in (0, +\infty)}$$

pro $v \to 0+$ a $v \to +\infty$ $\quad f(v) \to 0$

$$\Big(\lim_{v \to 0+} f(v) = \lim_{v \to 0} \underset{\to 0}{K v^2} \underset{\to 1}{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}} \Big) = 0,$$

$$\lim_{v \to +\infty} f(v) = \lim_{v \to +\infty} K \cdot \frac{v^2}{e^{\frac{mv^2}{2kT}}} = 0 \quad (\text{l'H.} + \text{VLSF})$$

$f(v) > 0$, spojitá, maximum bude v $(0, +\infty)$ existovat:

stac. body:

$$f'(v) = e^{-\frac{mv^2}{2kT}} K v \left(2 - \frac{v^2 m}{kT} \right),$$

$$f'(v) = 0 \iff \underline{v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \quad - \text{ zde } f(v) \text{ má globální maximum}$$

Příklad 5 (z „matematiky")

<u>Ukažte, že pro v. $x \in R$ platí: $\quad e^x \geqq x + 1$:</u>

$g(x) = e^x - (x+1)$ $\quad$ 1) g je spojitá v R, $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - (x+1)) = +\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x - (x+1) \right) = +\infty$$

(vypřed: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - (x+1)\right) = „0 - (-\infty)" \underset{AL}{=} +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - (x+1)\right) = „\infty - \infty" =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x+1}{e^x}\right) = „\infty\,(1-0)" = \infty\ )$$

Dále – stacionární body:

$g'(x) = e^x - 1$, $g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

zde „musí" být globální minimum

(je zde lokální – $g'(x) < 0$ pro $x < 0$ a $g'(x) > 0$ pro $x > 0$,
tj. $g \searrow$ v $(-\infty, 0)$ a $g \nearrow$ v $(0, +\infty)$,

$g(0) = 0$, tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí, že

$g(x) \geqq 0$, tj. $e^x - (x+1) \geqq 0$, tj.

$\underline{e^x \geqq x+1}$

(což jsme měli dokázat)

2. Taylorův polynom funkce

„Motto": „vylepšené" lineární aproximace funkce f v okolí bodu $\underline{a}$ polynomem vyššího stupně za „pomoci" derivací vyšších řádů.

Jak? <u>Bylo</u> (lineární aproximace funkce v okolí bodu $\underline{a}$):

Existuje-li $f'(a) \in R$, pak $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$,

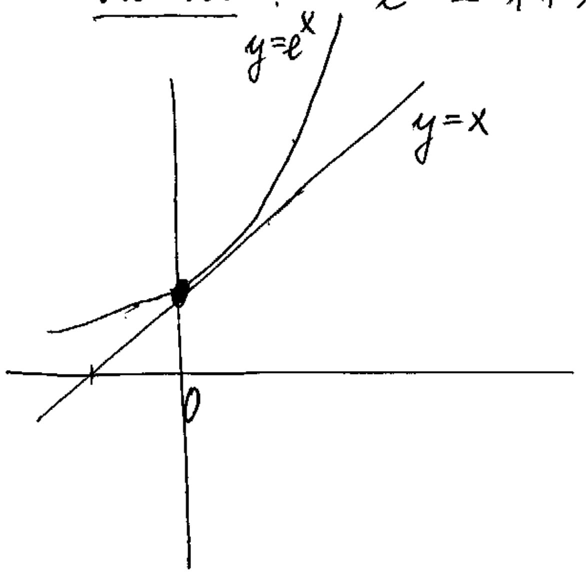
kde $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$, a pak $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$

v okolí bodu $\underline{a}$ (pro „malá" $(x-a)$) (a $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

je rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$

(tj. tečna je grafem lineární aproximace" v okolí bodu $\underline{a}$).

<u>Příklad</u>: $e^x \cong 1 + x$ v okolí bodu $a = 0$;



když se budeme vzdalovat „od bodu $a=0$ (obecně od bodu $\underline{a}$), pak už chyba aproximace se obecně bude zhoršovat:

$e^1 \cong 1 + 1 = 2$, ale víme, že $e \cong 2{,}71\ldots$

Jak aproximaci zlepšit tak, že by chyba byla „malá" i pro vzdálenější body x (od bodu a)? Zkusme „vyrobit" parabolu tak, aby procházela bodem $[a, f(a)]$, měla stejnou tečnu v bodě $[a, f(a)]$ s grafem f a byla „stejně" prohnutá!

„Prohnutí" grafu funkce pomohla charakterizovat druhá „derivace funkce v okolí uvažovaného bodu - zkusme:

Hledejme polynom $T_2(x)$ druhého stupně tak, aby platilo:

$$f(a) = T(a)\ ,\quad f'(a) = T'(a) \quad \text{(společná tečna grafů)}$$

$$\text{a}\quad f''(a) = T''(a)$$

<u>Předpokládejme, že existuje $f''(a) \in R$:</u>

a $\underline{T_2(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2\ ,\ A, B, C\ -\ ?}$

Chceme-li:

1) $f(a) = T(a) \Rightarrow A = f(a)$

2) $f'(a) = T'(a) \Rightarrow B = f'(a)$

3) $f''(a) = T''(a) = 2C \Rightarrow C = \dfrac{f''(a)}{2}$

Tedy, hledaný polynom je

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

pak $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ (chybu zde označujeme $R_2(x)$)

a bylo by „dobré", kdyby platilo (analogicky jako u lineární aproximace)

$$\underline{\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0 \qquad (?)}$$

<u>Zkusme:</u>

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right)}{(x-a)^2} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} =$$

(ex. $f''(a) \Rightarrow$ ex. $f'(x)$ v $U(a) \Rightarrow f$ je spojitá v $U(a)$)

$$\underset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - f''(a) \right) = 0$$

(neboť $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a}$, zde předpokládáme $f''(a) \in R$)

A ukázalo se, že se takto (jako s polynomem druhého stupně) může „dále vylepšovat" aproximace funkce f v okolí bodu a, pokud f má v bodě $\underline{a}$ derivace vyšších řádů:

<u>Definice:</u> Nechť $f^{(n)}(a) \in R$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se nazývá Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě $\underline{a}$.

(Poznámka: existuje-li $f^{(n)}(a)$, $n \in N \Rightarrow$ funkce f má všechny derivace nižšího řádu v $U(a)$)

a platí:

Věta o Taylorově polynomu:

Nechť funkce f má $f^{(n)}(a) \in R$. Pak $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom nejvýše n-tého stupně, pro který platí:

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + R_n^{f,a}(x) \quad \text{(Taylorův vzorec)}$$

tak, že

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(Tedy, vezmeme-li aproximaci $f(x) \cong T_n^{f,a}(x)$ pomocí Taylorova polynomu v okolí bodu $\underline{a}$, jde „chyba aproximace" $R_n^{f,a}(x)$ pro $x \to a$ rychleji k nule než $(x-a)^n$.)

($R_n^{f,a}(x)$ se nazývá zbytkem Taylorova polynomu $T_n^{f,a}(x)$)

Příklad: $f(x) = e^x$, $a=0$;

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, a tedy

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Navíc platí (pro odhad „velikosti" zbytku)

Věta (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť ex. $f^{(n+1)}(x)$ v $U(a,\delta)$, pak $f(x) = T_n^{f,a}(x) + R_n^{f,a}(x)$, kde pro každé $x \in U(a,\delta)$ je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde ξ je bod mezi body x a $\underline{a}$ (tj. $\xi = \xi(x)$).

Příklad: Ví se, že $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $x \in R$, $n \in N$

a pak: $R_n(x) = \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$, kde ξ je „mezi" 0 a x.

Pro $x = 1$ je $\xi \in (0,1)$ a tedy $e^{\xi} \leqq 3$ a máme odhad chyby

$|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Lze tedy

(i) pro n-pevné odhadnout velikost chyby, například pro

$n = 5$ je $|R_5(1)| \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \doteq 0,004166$

a výpočet užitím $T_5(x)$ dá $e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} =$

$= 2,7166\dots$

a kalkulačka: $e = 2,71828$.

(ii) pro požadovanou přesnost výpočtu čísla e najít $n \in N$ tak, aby $R_n(1)$ byl „požadovaně malý":

např. chceme-li $|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$, stačí $n = 7$.

Další příklad: Taylorův polynom pro funkci $f(x) = \sin x$, $a = 0$

$f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ tedy

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a $R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3}$, a tedy $|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$

(lze uvažovat zbytek po $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$) a

$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$ a $|R_{10}(1)| \leq \frac{1}{11!}$

Analogicky: $\underline{f(x) = \cos x\ ,\ a=0}$

$$f^{2k}(0) = (-1)^k,\quad f^{(2k+1)}(0) = 0\ ,\ \text{pak}$$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{a}\ |R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos\xi}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Poznámka o Taylorově řadě pro funkci e^x (v bodě $a=0$)

Víme, že pro lib. $n \in N$ je

(1) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)\ ;\quad R_n(x) = \frac{e^{\xi}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\ ;$$

(ξ mezi 0 a x)

pak $|R_n(x)| \le \dfrac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$ pro $x>0$, a $|R_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (užijeme toho, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

a věty o limitě sevřené posloupnosti)

. Tedy, přejdeme-li v rovnosti (1) k limitě pro $n\to\infty$, dostaneme ($\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ - definice „nekonečné řady")

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ \text{ pro lib. } x \in R}$$

(Vyjádření funkce $f(x)=e^x$ Taylorovou řadou)

Podobně lze ukázat (opět limitním přechodem pro $n\to\infty$), že z rovnosti (2), (3) pro funkce $\sin x$ a $\cos x$, kde

$$(2)\quad \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x), \quad x\in R$$

a

$$(3)\quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x), \quad x\in R,$$

že

$$\underline{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x\in R}$$

a

$$\underline{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x\in R}$$

(Taylorovy řady pro funkci $\sin x$, resp. $\cos x$)
(Podrobněji probíráno v Matematice A2)